Kapitel 5

Empirische Berechnungen

Die vorliegende Untersuchung war begleitet durch eine Reihe von empirischen Berechnungen. Sie hatten das Ziel, einerseits einige gewonnene theoretische-qualitative Ergebnisse zu testen und andererseits die praktischen Anwendung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenfunktionen, insbesondere aus mathematisch-rechentechnischer Sicht, unter Beweis zu stellen. Das Nichtverfügbarsein umfassender, realer Daten müsste von vornherein das Ziel ausschließen, irgendwelche Schlussfolgerungen für die Planungspraxis zu ziehen – so sehr dies auch wünschenswert wäre.

Die in der Arbeit (vgl. *Abschnitt 2. 5*. und *Abschnitt 4. 1*.) grundsätzlich empfohlene „Optimierungsmethode“ zur Ermittlung der sektoralen Material- und Primärressourcenfunktionen konnte wegen des mangelnden Zugangs zu realen Daten nur für einen Zweig, nämlich die Schwarzmetallurgie der DDR, realisiert werden. Die hierzu verwendeten Daten [9] sind auch zwar nicht ganz real, kommen in ihrer Gesamtkonstellation jedoch der Wirklichkeit sehr nahe,

Grundlage diese Berechnungen bildet ein durch das Programmpaket *TVB 100* [48] generiertes Produktionsplanoptimierungsmodell, das einen Stufenprozess der Schwarzmetallurgie der DDR reflektiert.

1. Roheisen-/Schrottaufkommen
↓
2. Stahlproduktion
↓
3. Halbzeugproduktion
↓
4. Walzstahlproduktion
↓
5. Abnehmer

Im Modell werden insgesamt 6 Standorte und 41 Erzeugnisse erfasst, wobei jedes Erzeugnis durch dessen Quelle und Art charakterisiert ist (doppelte Klassifikation).
Die Walzstahlerzeugnisse werden durch vier Abnehmer bezogen. Dabei ist es möglich, dass ein Abnehmer ein bestimmtes Walzerzeugnis von verschiedenen Standorten (Produzenten) beziehen kann. Es sei bemerkt, dass sich dieses Erzeugnis im Allgemeinen von Produktionsort zu Produktionsort durch verschiedene Aspekte, beispielsweise durch eine unterschiedliche Zusammensetzung des eingegangenen Vormaterials oder verschiedene Herstellungstechnologien, unterscheidet.
(Vgl. [9] für das vollständige Schema der beschriebenen Produktionsverflechtung).

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, die Höhe des Roheisen- bzw. Schrottbedarfs in Abhängigkeit von der Höhe einer Abnehmerforderung darzustellen.

Mathematisch wurde jeweils eine lineare Optimierungsaufgabe mit einem Parameter auf der rechten Seite einer einzelnen Restriktion gelöst. Die stückweise linearen Materialaufwands-funktionen

$$b = b_0 + b_1 x, \quad x \in [x_1,\ x_2],$$

die sich erwartungsgemäß als konvex erwiesen, sind folgenden Tabellen zu entnehmen:

Tabelle 5. 1.
Roheisenbedarf in Abhängigkeit von einer Abnehmerforderung

Definitionsbereich		b_0	b_1
0.0	168137.5	0.000	0.46271
168137.5	250000.0	-5619.739	0.49641

Tabelle 5. 2.
Rohschrottbedarf in Abhängigkeit von einer Abnehmerforderung

Definitionsbereich		b_0	b_1
0.0	168137.0	0.000	0.4627179
168137.0	862653.0	-9986.009	0.5221100
862653.0	962653.0	10305.900	1.2180100
962653.0	1106267.0	-637880.400	1.2466542
1106267.0	1180000.0	-6529807.000	1.2603040

Es sei bemerkt, dass die verwendeten und gewonnenen Daten die Dimension „Tonnen“ [t] haben.

Außer dem oben genannten „Schwarzmetallurgiemodell“ mussten wir wegen des Mangels an verfügbaren Daten doch auf statistische Zeitreihen zurückgreifen.
Das Datenmaterial dazu lieferte vor allem von Kigyóssy-Schmidt/Schwarz erarbeitete Verflechtungsreihe der DDR von 1962 bis 1980 [30]. (Die dafür 1980 angeführten Zahlen sind als vorläufige Daten angegeben).
Im ersten Quadranten werden vier materielle und drei nichtmaterielle Bereiche erfasst, und zwar:

1. Industrie;
2. Bauwirtschaft;
3. Landwirtschaft;
4. Verkehr;
5. Binnenhandel;
6. Bildungswesen;
7. Gesundheitswesen.

Die Angaben für die Bruttoproduktionswerte und Aufwendungen für die nichtmateriellen Bereiche sowie der Gesamtaufwand für Material und nichtmaterielle Leistungen sind in Mio Mark.

Vom III. Quadranten sind lediglich die Bestandteile „Jährlicher Grundfondsaufwand“ (in Mio Mark) und „Arbeitszeitaufwand“ (in Mio Stunden) angegeben.
Unsere Betrachtungen haben gezeigt, dass die Materialaufwandsfunktionen ausreichend genau als Polynomfunktionen

$$(5.\ 1.) \qquad b_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{K} b_{ijk} x_j^k, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

geschätzt werden können. Für diese polynomiale Regression wurde ein PL/1-Programm (*POLYREG*) geschrieben. Im Falle einer linearen Funktion wird neben der Angabe des Bestmmtheitsmaßes, des Korrelationskoeffizienten und des Standardfehlers der Residuen eine umfassende statistische Prüfung der ermittelten Parameter durchgeführt.
(Die Ermittlung mehrerer Regressionsfunktionen für die gleichen Daten ermöglicht es, unter Umständen eine für ein Lösungsverfahren „angenehme“ Funktion zu wählen).

Mit Hilfe des Programm *POLYREG* wurden die Funktionen $b_{ij}(x_j),\ i, j = 1, 2, ..., n,$ auf der Basis von Kigyóssy-Schmidt/Schwarz erarbeiteten Verflechtungsbilanzreihe der Volkswirtschaft der DDR von 1962 bis 1980 geschätzt. Die Bestimmtheitsmaße lagen über 0.90.
Es wurden dann folgende Verflechtungsmodelle aufgestellt:

Modell 1: Homogen-lineare Materialaufwandsfunktionen, basierend auf den Koeffizienten von 1969;

Modell 2: Homogen-lineare Materialaufwandsfunktionen, basierend auf den Koeffizienten von 1974;

Modell 3: Homogen-lineare Materialaufwandsfunktionen, basierend auf den Koeffizienten von 1979;

Modell 4: Inhomogen-lineare Materialaufwandsfunktionen;

Modell 5: Quadratische Materialaufwandsfunktionen;

Modell 6: Polynome 3. Grades als Materialaufwandsfunktionen;

Modell 7: Polynome 4. Grades als Materialaufwandsfunktionen.

Zur Überprüfung der Hypothese, dass der Anteil des $i-$ten Zweiges am Gesamtmaterialaufwand des $j-$ten Zweiges konstant ist (vgl. (2. 15.)) haben wir ferner den Gesamtmaterialaufwand des $j-$ten Zweiges, $j = 1, 2, ..., 7,$ in Abhängigkeit von der Gesamtproduktion des $j-$ten Zweiges, $j = 1, 2, ..., 7,$ geschätzt. Als Gewichte $c_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n,$ haben wir dabei den Anteil des $i-$ten Zweiges am Gesamtmaterialaufwand des $j-$ten Zweiges, $j = 1, 2, ..., 7,$ gewählt.
Die entsprechenden Modelle wurden mit *S4* - *S7*bezeichnet.

Zur Lösung der oben genannten Verflechtungsmodelle haben wir folgende Verfahren angewendet:

- Das Verfahren der sukzessiven Approximation (*VSA*);
- Das modifizierte Verfahren der sukzessiven Approximation (*MVSA*);
- Das Newton-Verfahren (*MV*);
- Das modifizierte Newton-Verfahren (*MNV*);
- Das Kantorowitsch-Newton-Verfahren (*KNV*).

Unter der Eingabe der Endverwendung des Jahres 1979 für die Zweige (in Mio Mark)

1.	Industrie:	122063
2.	Bauwirtschaft:	20440
3.	Landwirtschaft:	8861
4.	Verkehr:	10629
5.	Binnenhandel:	22522
6.	Bildungswesen:	2717
7.	Gesundheitswesen:	60

der DDR wurde die erforderliche Gesamtproduktion ermittelt.
Hierzu wurden PL/1-Programme erarbeitet (*VSA, MVSA, NV, MNV, KNV*) und Berechnungen auf ES 1035 durchgeführt.
Da im Falle eines nichtlinearen Gleichungssystems eine echte Fehlerabschätzung praktisch undurchführbar ist, haben wir uns mit dem einfachen Abbruchskriterium

$$\| x^{(\upsilon)} - x^{(\upsilon-1)} \| \leq \varepsilon$$

begnügt. Dabei haben wir $\varepsilon = 0.000001$ gewählt und mit voller Genauigkeit gerechnet. Es wurde zusätzlich geprüft, ob der Grenzwert der Iterationsfolge tatsächlich eine Lösung des entsprechenden Problems ist und dabei der „Erfüllungsgrad“ der Lösung angegeben.
Unabhängig davon, welche Anforderungen an die Anfangslösung gestellt werden müssen (hinreichende Bedingungen), um die Konvergenz des jeweiligen Verfahrens zu sichern, haben wir gleichzeitig mit drei Startlösungen

- $x^{(0)} := 0,$
- $x^{(0)} := y,$
- $x^{(0)} := \bar{y} = \left(500000,\ 70000,\ 100000,\ 50000,\ 70000,\ 20000,\ 20000\right)^T$

gerechnet.
Die nachfolgenden Tabellen geben einen Überblick über die durchgeführten Berechnungen:

Tabelle 5. 3.
Lösungen der Modelle 1 -7 und S4 und S6
(in Mio Mark)*

Modell / Zweig	Modell 1	Modell 2
1. Ind.	2.7960681E+05	2.8443790E+05
2. Bauw.	3.3957375E+04	3.4364962E+04
3.Landw.	4.2496770E+04	4.5443887E+04
4. Verk.	2.4425020E+04	2.4333176E+04
5. Binnenh.	2.2365690E+04	3.2798681E+04
6. Bildungsw.	7.9738477E+03	9.2976696E+03
7. Gesundh.	9.1506760E+03	9.2449097E+03

* Die Werte wurden 7 Stellen nach dem Dezimalpunkt aufgerundet.

Tabelle 5. 3.
(Fortsetzung)

Modell / Zweig	Modell 3	Modell 4
1. Ind.	2.9032488E+05	3.5785087E+05
2. Bauw.	3.5804190E+04	3.6070127E+04
3.Landw.	4.7233926E+04	5.3285094E+04
4. Verk.	2.4425152E+04	2.5344629E+04
5. Binnenh.	3.3721313E+04	3.4705822E+04
6. Bildungsw.	9.9081089E+03	8.4786525E+03
7. Gesundh.	9.5094222E+03	9.3468559E+03

Tabelle 5. 3.
(Fortsetzung)

Modell / Zweig	Modell 5	Modell 6
1. Ind.	2.9744662E+05	3.5785087E+05
2. Bauw.	3.5660353E+04	3.6070127E+04
3.Landw.	4.9457537E+04	5.3285094E+04
4. Verk.	2.4619854E+04	2.5344629E+04
5. Binnenh.	3.3721313E+04	3.4707822E+04
6. Bildungsw.	9.9081089E+03	8.4786525E+03
7. Gesundh.	9.5094222E+03	9.3468559E+03

Tabelle 5. 3.
(Fortsetzung)

Modell / Zweig	Modell 7
1. Ind.	2.4683085E+05
2. Bauw.	4.7658713E+04
3.Landw.	4.1314207E+04
4. Verk.	2.7042795E+04
5. Binnenh.	3.0511919E+04
6. Bildungsw.	1.9736542E+04
7. Gesundh.	2.1732628E+04

Tabelle 5. 3.
(Fortsetzung)

Modell / Zweig	Modell S4	Modell S6
1. Ind.	3.0334097E+05	9.7316091E+04
2. Bauw.	3.5612546E+04	2.0235088E+04
3.Landw.	5.0461446E+04	1.8663889E+04
4. Verk.	2.5066591E+04	1.8941819E+04
5. Binnenh.	3.4028935E+04	1.9584577E+04
6. Bildungsw.	3.4028935E+04	9.4281493E+03
7. Gesundh.	9.8041760E+03	4.4795216E+03

Mit Hilfe der angewandten Verfahren konnte keine Lösung der Modelle *S5* und *S7*ermittelt werden.

Die durchgeführten empirischen Berechnungen lassen folgende Schlussfolgerungen zu (Ausführliche Informationen sind in *Tabelle 5.4* zusammengefasst):

(1) Bei den Verfahren *VSA* und *MVSA* erfordert die Startlösung $x^{(0)} := 0$ eine Iteration mehr als für $x^{(0)} := y$, was theoretisch leicht bewiesen kann. Dies gilt auch für das Verfahren *MNV*, allerdings nur bei der Lösung eines homogen-linearen bzw. homogen-linearen Problems.

(2) Die Anzahl der Iterationen beim Verfahren *MVSA* ist um etwa 15% geringer als beim Verfahren *VSA*. Die Einsparung an Rechenzeit (in in jedem Falle gegeben) ist aber noch geringer.

(3) Die Verfahren *NV* und *KNV* lösen ein homogen-lineares bzw. inhomogen-lineares Problem in einem Schritt, was theoretisch bewiesen kann.

(4) Die Anzahl der erforderlichen Iterationen ist bei inhomogen-linearen Problemen relativ groß. Dies gilt auch für die notwendige Rechenzeit.

(5) Für die Startlösung $x^{(0)} = 0$ ist die Anzahl der erforderlichen Iterationen bei der Lösung eines homogen-linearen bzw. inhomogen-linearen Problems mit Hilfe des Verfahrens *MNV* gleich der Anzahl der Unbekannten; für jede andere Startlösung um Eins mehr.

(6) In der Regel entspricht die Effektivität der Verfahren *KNV, MNV, MVSA, VSA* hinsichtlich der erforderlichen Rechenzeit der angegebenen Reihenfolge.

(7) Bei gegebener Genauigkeit ε ist der „Erfüllungsgrad“ (d.h. die Genauigkeit, mit der die einzelnen Gleichungen erfüllt werden) bei den Gradientenverfahren größer als bei den Verfahren der sukzessiven Approximation.

Tabelle 5. 4.

Einige Informationen über die rechentechnische Realisierung der Verflechtungsmodelle

Modell 1

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	45	13.98	
	y	44	12.67	
	$\bar{y}$	45	13.38	
MVSA	0	40	11.73	
	y	39	12.60	
	$\bar{y}$	40	11.40	
NV	0	1	9.63	
	y	1	9.78	
	$\bar{y}$	1	9.76	
MNV	0	7	9.33	
	y	8	9.23	
	$\bar{y}$	8	9.73	
KNV	0	1	8.70	
	y	1	9.55	
	$\bar{y}$	1	9.10	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell 2

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	48	12.70	
	y	47	12.80	
	$\bar{y}$	47	12.40	
MVSA	0	41	12.63	
	y	40	12.34	
	$\bar{y}$	41	12.53	
NV	0	1	9.71	
	y	1	10.12	
	$\bar{y}$	1	10.77	
MNV	0	7	10.27	
	y	8	10.02	
	$\bar{y}$	8	10.61	
KNV	0	1	8.55	
	y	1	9.27	
	$\bar{y}$	1	9.25	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell 3

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	49	13.19	
	y	48	12.56	
	$\bar{y}$	49	12.39	
MVSA	0	42	11.07	
	y	41	11.60	
	$\bar{y}$	42	11.49	
NV	0	1	10.32	
	y	1	9.20	
	$\bar{y}$	1	9.76	
MNV	0	7	8.52	
	y	8	9.55	
	$\bar{y}$	8	10.50	
KNV	0	1	9.33	
	y	1	9.12	
	$\bar{y}$	1	9.56	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell 4

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	73	13.46	
	y	72	15.39	
	$\bar{y}$	72	14.77	
MVSA	0	61	10.54	
	y	60	9.79	
	$\bar{y}$	60	10.49	
NV	0	1	10.32	
	y	1	9.20	
	$\bar{y}$	1	9.76	
MNV	0	7	9.76	
	y	8	11.06	
	$\bar{y}$	8	10.87	
KNV	0	1	9.65	
	y	1	10.11	
	$\bar{y}$	1	9.65	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell 5

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	58	13.99	
	y	57	14.61	
	$\bar{y}$	57	16.26	
MVSA	0	48	17.71	
	y	47	13.70	
	$\bar{y}$	47	14.60	
NV	0	7	11.28	
	y	6	11.03	
	$\bar{y}$	5	11.29	
MNV	0	482	91.92	
	y	22	13.89	
	$\bar{y}$			∞[1)]
KNV	0	7	11.57	
	y	6	11.32	
	$\bar{y}$	5	10.66	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell 6

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	42	15.40	
	y	41	15.00	
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
MVSA	0	41	15.33	
	y	40	14.71	
	$\bar{y}$	38	14.87	
NV	0	9	13.31	
	y	6	12.28	
	$\bar{y}$	9	13.62	
MNV	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
KNV	0	9	12.58	
	y	6	10.96	
	$\bar{y}$	9	12.80	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell 7

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0 y $\bar{y}$			$\infty^{1)}$ $\infty^{1)}$ $\infty^{1)}$
MVSA	0 y $\bar{y}$			$\infty^{1)}$ $\infty^{1)}$ $\infty^{1)}$
NV	0 y $\bar{y}$	9	14.16	$\infty^{1)}$ $x \notin R_+^{n(2)}$
MNV	0 y $\bar{y}$			$\infty^{1)}$ $\infty^{1)}$ $\infty^{1)}$
KNV	0 y $\bar{y}$	9	13.12	$x \notin R_+^{n(2)}$ $x \notin R_+^{n(2)}$

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell S4

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0	64	13.76	
	y	63	14.37	
	$\bar{y}$	64	13.71	
MVSA	0	55	12.67	
	y	54	13.86	
	$\bar{y}$	54	13.77	
NV	0	1	10.44	
	y	1	10.19	
	$\bar{y}$	1	9.29	
MNV	0	7	9.46	
	y	8	9.38	
	$\bar{y}$	8	10.39	
KNV	0	1	9.11	
	y	1	9.65	
	$\bar{y}$	1	8.83	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell S5

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
MVSA	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
NV	0			unbestimmt divergent
	y			,,
	$\bar{y}$			,,
MNV	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
KNV	0			unbestimmt divergent
	y			,,
	$\bar{y}$			,,

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell S6

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
MVSA	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
NV	0	12	14.66	
	y	29	16.72	
	$\bar{y}$	10	13.35	
MNV	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
KNV	0	12	13.48	
	y	29	15.69	
	$\bar{y}$	10	12.90	

Tabelle 5. 4.
(*Fortsetzung*)

Modell S7

Verfahren	Anfangslösung	Anzahl der Iterationen	ZE-Zeit (Sekunden)	Bemerkungen
VSA	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
MVSA	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
NV	0			$x \notin R_+^n$ [2)]
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
MNV	0			$\infty^{1)}$
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$
KNV	0			$x \notin R_+^n$ [2)]
	y			$\infty^{1)}$
	$\bar{y}$			$\infty^{1)}$

[1)] Die Folge ist absolut divergent.
[2)] Die gefundene „Lösung“ ist nicht nichtnegativ.

Numerische Experimente mit einem 49-sektoralen „BRD-Modell“, basierend auf den in [6] enthaltenen Daten, haben die obigen Schlussfolgerungen im Wesentlichen bestätigt.
Zum Beispiel können wir für ein Experiment, bei dem etwa 20 Materialaufwandsfunktionen als nichtlinear angenommen werden, folgende Angaben machen:

Verfahren	ZE-Zeit (Sekunden)
VSA	435.54
MVSA	396.14
NV	84.82
MNV	200.14
KNV	68.68

Zwei Tatsachen fallen dabei auf:

1. Die durch *MVSA* erzielte Konvergenzbeschleunigung ist gegenüber *VSA* relativ gering;
2. Die Gradientenverfahren (*NV, MNV, KNV*) erweisen sich gegenüber den Verfahren der sukzessiven Approximation als die eindeutig effektiveren.